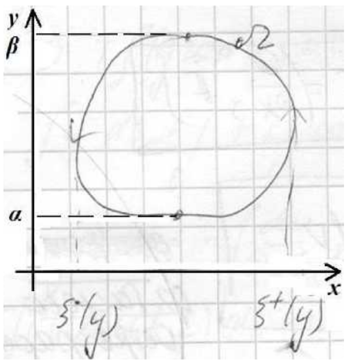
24. Многомерное волновое уравнение

24.1. Формула Грина, формула Гаусса Остроградского

Напишем одну из основных формул анализа. Пусть $F(x,y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, тогда:

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{\xi^-(y)}^{\xi^+(y)} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(F\left(\xi^+(y), y\right) - F\left(\xi^-(y), y\right) \right) dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} F\left(\xi^+(y), y\right) dy + \int\limits_{\beta}^{\alpha} F\left(\xi^-(y), y\right) dy = \oint\limits_{\partial\Omega} F(x,y)\, y'(l)\, dl.$$



Аналогично для любой функции $G(x,y)$

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} dxdy = \oint\limits_{\partial\Omega} G(x,y)\left(-x'(l)\right) dl,$$

складывая эти две формулы, мы получим **формулу Грина**:

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_{\partial\Omega} \left[F(x,y)\, y' - G(x,y)\, x' \right] dl.$$

Выражение в квадратных скобках можно интерпретировать как произведение векторов (F, G) и $(y', -x')$. Каков смысл вектора $(y', -x')$? Как известно, при движении точки (x,y) по кривой, ее вектор скорости (x', y') является касательным к кривой. Поскольку $\langle (x', y'), (y', -x') \rangle = 0$, $(y', -x')$ — это вектор, перпендикулярный вектору скорости. Длина этого вектора равна длине вектора скорости, поэтому можно записать, что

$$\oint\limits_{\partial\Omega} \left(Fy' - Gx' \right) dt = \oint\limits_{\partial\Omega} \langle (F, G), |\vec{n} \rangle\, dl,$$

где $l = \int \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$ — длина кривой, $dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$ — дифференциал этой кривой, $\vec{n} = \dfrac{(y', -x')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ — вектор нормали в кривой. Аналогичным образом в многомерном случае, когда у нас есть векторное поле $F = (F_1, \ldots, F_n)$ в векторном пространстве $x = (x_1, \ldots, x_n)$, имеет место **формула Остроградского–Гаусса**:

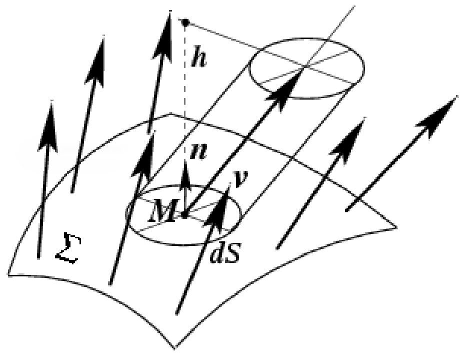
$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle dS = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV, \quad \vec{F} = (F_1, \ldots, F_n), \quad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \left\langle \nabla, \vec{F} \right\rangle = \operatorname{div} \vec{F}$$

называется **дивергенцией векторного поля** $\vec{F}$.

Левая часть формулы Остроградского—Гаусса имеет важный физический смысл. Рассмотрим движущуюся жидкость, и пусть $\vec{v}(x, y, z)$ — скорость жидкости в точке (x, y, z). Вырежем мысленно область Ω и посмотрим сколько жидкости протечет через границу Ω за время Δt. Если скорость направлена перпендикулярно границе, то за время Δt через площадку dS вытечет $|\vec{v}|\,\Delta t dS$ (как паста из тюбика). Если скорость направлена по касательной, то не вытечет ничего (жидкость течет вдоль dS), а если наискосок, то вытечет $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \Delta t dS$, т. е. учитывается только нормальная составляющая скорости.



Если рассмотреть теперь всю поверхность, то за время Δt вытекает $\int\limits_{\partial\Omega} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \Delta t dS$, а скорость вытекания равна соответственно $\int\limits_{\partial\Omega} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dS$, она и называется **потоком**. По аналогии с этой физической ситуацией для любого векторного поля $\vec{F}$ величина $\int\limits_{\partial\Omega} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle dS$ называется **потоком этого векторного поля через поверхность** $\partial\Omega$.

24.2. Уравнение мембраны

Рассмотрим мембрану некоторой формы, растянутую и закрепленную по краю. В равновесии в каждой точке x и в каждом направлении $\vec{n}$ действует сила $\vec{T}(x, \vec{n})$ натяжения мембраны. Сумма воздействий по всем направлениям равна нулю. Если приложить к мембране внешнюю силу с поверхностной плотностью $f(x)$, то она примет изогнутую форму. Силы натяжения уже не будут уравнивать друг друга, а будут компенсировать внешнее воздействие. Для того, чтобы написать условие баланса, необходимо выделить мысленно некоторый фрагмент мембраны (обозначим его через Ω), вычислить внешнюю силу, которая приложена к этому фрагменту — она равна $\int\limits_{\Omega} f dS$, и вертикальную проекцию силы натяжения, действующей на границу этого фрагмента. Эта сила вычисляется, как и в случае струны, через производную (т.е. градиент $\nabla u = \operatorname{grad} u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x^n}\right)$) функции $u(x)$, и равна

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\left\langle \vec{T}(x, \vec{n}), \operatorname{grad} u \right\rangle}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} u|^2}} dl.$$

Таким образом, условие равновесия приобретает вид:

$$\int\limits_{\Omega} f dS + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\left\langle \vec{T}(x,\vec{n}), \operatorname{grad} u \right\rangle}{\sqrt{1+|\operatorname{grad} u|^2}} dl = 0.$$

В простейших случаях $\vec{T}(x,\vec{n}) = T\vec{n}$, предполагается, что grad u мал, поэтому интеграл заменяется на

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\left\langle \vec{T}(x,\vec{n}), \operatorname{grad} u \right\rangle}{\sqrt{1+|\operatorname{grad} u|^2}} dl \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{\partial\Omega} T \left\langle \operatorname{grad} u, \vec{n} \right\rangle dl,$$

что дает уравнение

$$\int\limits_{\Omega} f dS + \int\limits_{\partial\Omega} T \left\langle \operatorname{grad} u, \vec{n} \right\rangle dl = 0.$$

Поскольку в силу формулы Остроградского-Гаусса

$$\int\limits_{\partial\Omega} T \left\langle \operatorname{grad} u, \vec{n} \right\rangle dl = \int_{\Omega} T \Delta u dS$$

мы получаем

$$\int\limits_{\Omega} (T\Delta u + f)\, dS = 0.$$

Поскольку область Ω выбиралась произвольно, отсюда следует, что

$$T\Delta u + f = 0.$$

Это — **уравнение равновесия мембраны**, означающее равенство нулю в каждой точке приложенных к ней сил. Если сумма сил не равна нулю, то мы должны написать динамическое уравнение – **второй закон Ньютона** — линеаризованное уравнение мембраны в простейшем случае:

$$\rho(x)\, u_{tt} = T\Delta u + f(t,x).$$

В более общей ситуации $\vec{T}(x,\vec{n})$ является линейной функцией от $\vec{n}$: $\vec{T}(x,\vec{n}) = A(x)\,\vec{n}$, где A — некоторая матрица $A = (a^{ij})$, и тогда уравнение мембраны будет иметь более сложный вид:

$$\rho(x)\, u_{tt} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{a^{ij}(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_i}}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2}} \right) + f(t,x).$$

24.3. Уравнение электростатического поля (гравитационного поля)

В основе теории электростатического и гравитационного взаимодействия лежит *закон обратных квадратов*: два объекта притягиваются или отталкиваются с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = \frac{k}{r^2}.$$

В гравитации k зависит от масс тел, в электростатике — от зарядов.

Этот закон для гравитационных воздействий был обоснован Ньютоном на основании законов Кеплера движения планет, которые рассматриваются как экспериментальный факт, поскольку были сформулированы Кеплером на основе результатов многолетних наблюдений его учителя, астронома Браге.

Для электрических взаимодействий закон обратных квадратов основан также на экспериментальных наблюдениях, одним из наиболее убедительных обоснований является описанный Максвеллом в «Трактате об электричестве и магнетизме» эффект полного перетекания заряда: если заряженное тело внести внутрь металлической сферы и прикоснуться к ней, то заряд перейдет на сферу полностью, без остатка. Максвелл уже математическими средствами, доказывает, что для всякого закона взаимодействия, кроме закона обратных квадратов это невозможно.

Обычно законы электрического и гравитационного взаимодействия описывают с помощью ряда объектов уже математического характера, получаемых в ряде тех или иных абстракций.

Первая из абстракций — это *векторное поле*. Фиксируя одно из взаимодействующих тел (объектов), мы начинаем перемещать другое из одной точки пространства в другую, измеряя величину и направление действующей силы. Если теперь к каждой точке пространства «приложить» соответствующий вектор, то мы получим векторное поле $\vec{F}(x, y, z)$, которое характеризует уже только первый из взаимодействующих объектов.

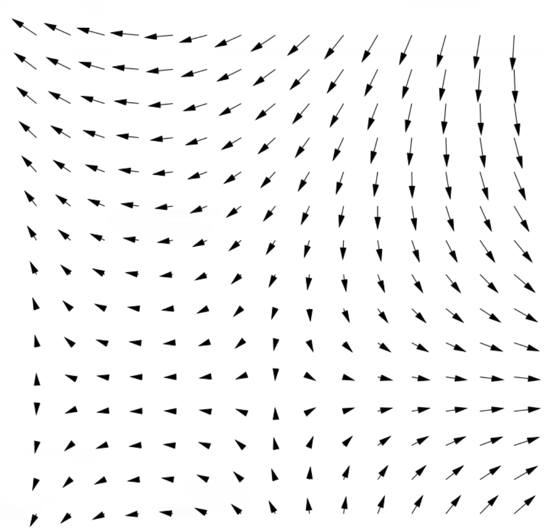


Рис. 24.1. Иллюстрация векторного поля.

Вторая абстракция — это *потенциал*. Он возникает, когда $\vec{F}(x, y, z)$ оказывается градиентом некоторой функции $U(x, y, z)$:

$$\vec{F}(x, y, z) = \operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Для

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot \frac{k}{|\vec{r}|^2}$$

(первый множитель просто указывает направление)

$$U(\vec{r}) = -\frac{k}{|\vec{r}|}.$$

Третья абстракция состоит в том, что мы представляем произвольное поле сил в виде суммы сил точечных зарядов. Это называется *принципом суперпозиции*: если зарядов несколько, то их воздействия складываются, а если заряд распределен по области пространства, то их воздействие интегрируется:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \quad U = \sum_{i=1}^{n} U_i.$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\int\limits_{\Omega} \frac{\rho(\vec{p})(\vec{p}-\vec{r})}{|\vec{p}-\vec{r}|^3} dp, \quad U(\vec{r}) = \int\limits_{\Omega} \frac{\rho(\vec{p})}{|\vec{p}-\vec{r}|} dp, \tag{24.1}$$

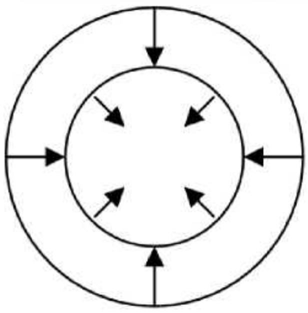
где ρ — плотность заряда.

Наиболее важным в теории гравитационного и электрического поля оказывает *принцип обратной интерпретации*, связанный со следующим эффектом: если посмотреть на картинку (24.1), то можно нарисованные на ней стрелочки ассоциировать со скоростями некой движущейся среды. Если посчитать поток соответствующего векторного поля через сферу радиуса R, то окажется что

$$\int\limits_{S_R} \left\langle \vec{F}, \overleftarrow{n} \right\rangle dS = -\int\limits_{S_R} \left|\vec{F}\right| dS = -\frac{k}{R^2} \int\limits_{S_R} dS = -\frac{k}{R^2} 4\pi R^2 = -4\pi k,$$

т. е. не зависит от радиуса сферы.

Получается, что для любого сферического слоя через его «внутреннюю» границу вытекает ровно столько, сколько втекает через границу «внешнюю», так что если ассоциировать векторное поле с движущейся средой, то вне центра сферы эта среда никуда не исчезает, и ниоткуда не появляется. А в центре сферы образуется как бы «сток».



Принцип обратной интерпретации состоит в том, что заряд (или массу) можно интерпретировать как величину «стока» в данной точке. А математически суммарный сток в некоторой области выражается как величина потока через границу этой области векторного поля сил (с коэффициентом 4π).

$$4\pi \int\limits_{\Omega} \rho dV = \int\limits_{\partial\Omega} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle dS.$$

Поскольку по формуле Гаусса—Остроградского

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle dS = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV$$

мы получаем, что для любой области Ω

$$\int\limits_{\Omega} \left(4\pi\rho - \operatorname{div} \vec{F}\right) dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{F} = 4\pi\rho.$$

Для потенциального поля сил $\vec{F} = \nabla U$ получаем уравнение

$$\Delta U = 4\pi\rho(x, y, z). \tag{24.2}$$

Таким образом, с одной стороны, U связано с ρ соотношением (24.1), а с другой соотношением (24.2). Фундаментальным фактом математической физики является то, что эти соотношения эквивалентны математическим: первая формула есть просто формула решения уравнения (24.2).

Нас же будут интересовать динамические уравнения, которые получаются из (24.2), выражающем закон равновесия, добавлением соответствующих динамических членов. Если речь идет о динамике «механической», описываемой вторым законом Ньютона, то мы получаем уравнение, описывающее сплошную среду:

$$m(x) U_{tt} = \Delta U - 4\pi\rho(x, y, z, t).$$

Если речь идет о динамике тепловой, описываемой законом Фурье $Q(x) = c(x)\dfrac{dU}{dt}$, (где U — температура, Q — тепловой поток), то мы получаем уравнение

$$c(x)\,U_t = \Delta U - 4\pi\rho\,(t, x, y, z)\,.$$

Уравнения электростатической динамики чуть сложнее, мы их касаться не будем.

24.4. Многомерное волновое уравнение. Общий подход и виды

Рассмотрим теперь простейшее уравнение

$$u_{tt} = \Delta u = u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n}.$$

По аналогии с уравнениями первого порядка и с уравнением $u_{tt} = u_{xx}$ можно было бы получить, что общее решение будет иметь вид произвольной функции от нескольких функциональных (играющих роль первых интегралов). Оказывается, однако, что это не так: подстановка в уравнение $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ функции вида $u(t, x, y) = F(I, J)$, где F — произвольная функция, дает равенство:

$$\begin{aligned} F_{II}\left(I_t^2 - I_x^2 - I_y^2\right) + 2F_{IJ}\left(I_tJ_t - I_xJ_x - I_yJ_y\right) + F_{JJ}\left(J_t^2 - J_x^2 - J_y^2\right) + \\ + F_I\left(I_{tt} - I_{xx} - I_{yy}\right) + F_J\left(J_{tt} - J_{xx} - J_{yy}\right) = 0. \end{aligned}$$

Чтобы F была произвольной, нужно чтобы каждая из скобок равнялась нулю.

$$\begin{aligned} I_t^2 &= I_x^2 + I_y^2, \\ J_t^2 &= J_x^2 + J_y^2, \\ I_tJ_t &= I_xJ_x + I_yJ_y, \\ I_{tt} &= I_{xx} + I_{yy}, \\ J_{tt} &= J_{xx} + J_{yy}. \end{aligned}$$

Не трудно проверить, что из этих равенств следует, что (I_t, I_x, I_y) пропорционально (J_t, J_x, J_y), а значит $I = F(J)$, т.е. наши «интегралы» не являются различными.

Рассмотрим двумерное волновое уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}.$$

Какие могут быть решения у этого уравнения? Прежде всего, решение может не зависеть от y, и тогда уравнение сводится к одномерному и имеет решение вида

$$u = f(x \pm t)\,.$$

Аналогично решения, не зависящие от x имеют вид

$$u = f(y \pm t)\,.$$

Эти решения называют **плоскими волнами** (по аналогии с волнами на поверхности моря).

Это не единственные решения, ассоциирующиеся с волновыми процессами. Если перейти к новым координатам:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ \tilde{y} = -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{cases}$$

то уравнение, как оказывается, не меняется:

$$\tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}}.$$

Тогда решением будет функция

$$u = f\left(\tilde{x} - t\right) = f\left(x\cos\varphi + y\sin\varphi - t\right),$$

что более коротко записывается в виде

$$u = f\left(t - \langle n, \tilde{x}\rangle\right),$$

где $n = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ — вектор, указывающий *направление распространения* плоской волны.

Аналогично для многомерного уравнения

$$u_{tt} = \Delta u.$$

Решения, где $x \in \mathbb{R}^n$ типа плоских волн имеют вид

$$u = F\left(t - \langle\theta, x\rangle\right),$$

где θ — единичный вектор (точка единичной сферы). Примечательно, что общее решение уравнения может быть представлено в виде

$$u = \int\limits_{\theta\in S_n} F\left(t - \langle\theta, x\rangle\right) dS,$$

т. е. в виде сумм плоских волн. По этой причине уравнение $u_{tt} = \Delta u$ обычно называется **многомерным волновым уравнением**.

Еще один тип решения волнового характера уравнения $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ ассоциируется с волнами, идущими от брошенного в воду камня. Это решения радиального типа

$$u = u\left(t, r\right),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ в двухмерном случае, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в трехмерном случае. Вычисление производных дает:

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x = \frac{1}{r}u_r x, \\ u_y &= u_r r_y = \frac{1}{r}u_r y, \\ u_{xx} &= \left(\frac{1}{r}u_r\right)_r \frac{x^2}{r} + \frac{1}{r}u_r, \\ u_{yy} &= \left(\frac{1}{r}u_r\right)_r \frac{y^2}{r} + \frac{1}{r}u_r, \\ u_{zz} &= \left(\frac{1}{r}u_r\right)_r \frac{z^2}{r} + \frac{1}{r}u_r. \\ \Delta u &= \left(\frac{1}{r}u_r\right)_r r + \frac{1}{r}u_r = u_{rr} + \frac{n-1}{r}u_r. \end{aligned}$$

Таким образом, для радиального решения, уравнение $u_{tt} = \Delta u$ приобретает вид

$$u_{tt} = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r.$$

Это уравнение именное, и называется **уравнением Эйлера—Пуассона—Дарбу**. Попробуем избавиться от u_r, совершив замену $u = r^\alpha v$. Получим

$$\begin{aligned} u_r &= \alpha r^{\alpha-1} v + r^\alpha v_r, \\ u_{rr} &= \alpha(\alpha-1) r^{\alpha-2} v + 2\alpha r^{\alpha-1} u_r + r^\alpha v_{rr}. \end{aligned}$$

Чтобы v и v_r исчезли, необходимо, чтобы

$$\begin{cases} \alpha(\alpha-1) + \alpha(n-1) = 0, \\ 2\alpha + (n-1) = 0. \end{cases} \Rightarrow n = 3, \ \alpha = -1$$

Таким образом, размерность 3 с точки зрения волнового уравнения оказывается особенной: только в трехмерном случае удается избавиться от младших производных.

Итак в трехмерном случае для v мы получаем уравнение

$$v_{tt} = v_{rr}.$$

Его решение имеет вид

$$v(t,r) = f(t-r) + g(t+r),$$

а решение исходного уравнения — вид

$$u(t,x,y,z) = \frac{f(t-r) + g(t+r)}{r}.$$

Такое решение называется **сферической волной**.

24.4.1. Формула Пуассона для трехмерного волнового уравнения

Перейдем теперь к нашему основному вопросу: как найти решение волнового уравнения, которое мы будем записывать двумя способами:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u|_{t=0} &= \varphi(x,y,z), \\ u_t|_{t=0} &= \psi(x,y,z), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u, \\ u|_{t=0} &= \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} &= \psi(x). \end{aligned}$$

Во второй форме x — трехмерный вектор, соответствующий (x,y,z) в первой записи.

Основное соображение, позволяющее получить решение, навевается формулой сферических волн. Из этой формулы следует, что на значения решения в точке x в момент времени t оказывает влияние значения решения в момент времени $t = 0$, находящиеся только на расстоянии at от x. Причем, в силу равноправия всех направлений (ведь волновое уравнение не меняется при повороте системы координат) это влияние оказывается в определенной мере «равноправным». Это приводит к мысли: для любой точки $x \in \mathbb{R}^3$ рассмотреть функцию

$$U(t, r, x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{\xi \in S_r(x)} u(t, \xi)\, dS,$$

(где $S_r(x)$ — сфера радиуса r с центром в точке x), и попробовать исследовать ее связь с решением. Эта функция удобна потому, что

$$U(t, r, x) \underset{r \to 0}{\longrightarrow} u(t, x),$$

т. к. сфера стягивается в точку, а $u(t, x)$ — непрерывная функция, и потому для любого ε найдётся такое r, что для любых $\xi : |\xi - x| < r$ будет выполнено

$$u(t, x) - \varepsilon \leqslant U(t, \xi) \leqslant u(t, x) + \varepsilon,$$

а значит

$$[u(t, x) - \varepsilon]\, 1 \leqslant U(t, r, x) \leqslant [u(t, x) + \varepsilon]\, 1.$$

Что и означает, что $U(t, r, x) \underset{r \to 0}{\longrightarrow} u(t, x)$.

Вычислим

$$U_{tt} = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{\xi \in S_r(x)} u_{tt}(t, \xi)\, dS$$

и производные функции $U(t, r, x)$ по r. Для этого удобно под интегралом сделать замену $\xi = x + r\theta$, откуда $r\theta = \xi - x \in S_r(0)$, а значит $\theta \in S_1(0)$. Тогда, поскольку $dS_r = r^2 dS_1$,

$$U_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\theta \in S_1(0)} u(t, x + r\theta)\, dS\right) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\theta \in S_1(0)} (\nabla u(t, x + r\theta), \theta)\, dS =$$

$$(\text{возвращаемся к переменной } \xi) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{\xi \in S_r(x)} (\nabla u(t, \xi), \theta)\, dS =$$

$$(\text{формула Гауса–Остроградского}) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{\xi \in B_r(x)} \Delta u(t, \xi)\, dV = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_0^r \int\limits_{\xi \in S_\rho(x)} \Delta u(t, \xi)\, dS d\rho.$$

Теперь умножим полученное равенство на r^2 и еще раз продифференцируем по r. Получим

$$\left(r^2 U_r\right)_r = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\xi \in S_r(x)} \Delta u(t, \xi)\, dS.$$

Таким образом, если $u(t, x)$ — решение волнового уравнения, то для функции U может быть написано дифференциальное уравнение

$$U_{tt} = a^2 \left(r^2 U_r\right)_r \frac{1}{r^2} = a^2 \left(U_{rr} + \frac{2}{r} U_r\right),$$

т. е. функция U удовлетворяет уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу. Для того, чтобы найти решение, нам необходимо знать начальные условия

$$U(t,r,x)\left.\right|_{t=0} = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{\xi\in S_r(x)} \varphi(\xi)\,dS,$$

$$U_t(t,r,x)\left.\right|_{t=0} = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{\xi\in S_r(x)} \psi(\xi)\,dS.$$

Теперь у нас все решается: уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу заменой $U = \dfrac{V}{r}$, $V = rU$, сводится к волновому уравнению $V_{tt} = a^2 V_{rr}$, причем $V\left.\right|_{r=0} = 0$. Его решение имеет вид

$$V = f(t-ar) + g(t+ar),$$

и, обозначая

$$V\left.\right|_{t=0} = \frac{1}{4\pi r} \int\limits_{\xi\in S_r(x)} \varphi(\xi)\,dS = \Phi(r), \quad V_t\left.\right|_{t=0} = \frac{1}{4\pi r} \int\limits_{\xi\in S_r(x)} \psi(\xi)\,dS = \Psi(r), \tag{24.3}$$

мы получим выражение для $V(t,r)$ (по формуле Д'Аламбера при $r > at$ и в силу условия $V\left.\right|_{r=0} = 0$ при $r < at$):

$$V(t,r) = \frac{\Phi(at+r) - \Phi(at-r)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{at-r}^{at+r} \Psi(\rho)\,d\rho.$$

А выражение для U будет иметь вид

$$U(t,r,x) = \frac{\Phi(at+r) - \Phi(at-r)}{2r} + \frac{1}{2ar} \int\limits_{at-r}^{at+r} \Psi(\rho)\,d\rho.$$

Таким образом, мы получили формулу для $U(t,r,x)$ и нам остается совершить предельный переход

$$u(t,x) = \lim_{r\to 0} U(t,r,x) = \Phi'(at) + \frac{1}{a}\Psi(at),$$

что с учетом введенных нами обозначений (24.3), дает

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{\xi\in S_{at}(x)} \psi(\xi)\,dS + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int\limits_{\xi\in S_{at}(x)} \varphi(\xi)\,dS \right), \tag{24.4}$$

где dS — элемент площади на сфере радиуса at с центром в точке x. Эта формула носит название **формулы Пуассона**. Таким образом доказана теорема.

Теорема 24.1. *Решение начальной задачи для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$:*

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

$$u\left.\right|_{t=0} = \varphi(x,y,z),$$

$$u_t\left.\right|_{t=0} = \psi(x,y,z),$$

задается формулой Пуассона (24.4). Решение является классическим, если $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^3(\mathbb{R}^3)$.

24.4.2. Формула запаздывающих потенциалов

Принцип Дюамеля позволяет написать решение и для уравнения с правой частью. Пусть

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(t, x, y, z)$$

решение однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{aligned} u\,|_{t=0} &= \varphi(x, y, z), \\ u_t\,|_{t=0} &= \psi(x, y, z), \end{aligned}$$

в точке $t = 0$ для $\varphi \equiv 0$ имеет вид

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \psi(\xi)\, dS,$$

в точке $t = \tau$

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2 (t - \tau)} \int\limits_{\xi \in S_{a(t-\tau)}(x)} \psi_\tau(\xi)\, dS,$$

а интеграл Дюамеля тогда приобретает вид

$$u(t, x) = \int\limits_0^t \frac{1}{4\pi a^2 (t - \tau)} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} f(\tau, \xi)\, dS d\tau = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^{at} \int\limits_{\xi \in S_\rho(x)} \frac{f\left(t - \frac{\rho}{a}, \xi\right)}{\rho} dS d\rho$$

(здесь сделана замена переменных $\rho = a(t - \tau)$). Поскольку двойной интеграл представляет собой просто интеграл по шару, получаем

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{\xi \in B_{at}(x)} \frac{f\left(t - \frac{|\xi - x|}{a}, \xi\right)}{|\xi - x|} dV.$$

Эта формула называется **формулой запаздывающих потенциалов**. Название не очень правильное. Оно ассоциировано с формулой для потенциала электрического или гравитационного поля $U(x) = \int \frac{f(\xi)}{|\xi - x|} d\xi$, но, как видно, запаздывает в формуле значение аргумента у функции f, а не потенциал. Таким образом доказана еще одна теорема.

Теорема 24.2. *Решение начальной задачи для неоднородного волнового уравнения в* $\mathbb{R}^3$, *удовлетворяющего нулевым начальным условиям:*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u + f(t, x, y, z), \quad x \in \mathbb{R}^3 \\ u\,|_{t=0} &= 0, \\ u_t\,|_{t=0} &= 0, \end{aligned}$$

задается формулой запаздывающих потенциалов

$$U(x) = \int \frac{f(\xi)}{|\xi - x|} d\xi.$$

24.4.3. Формула Кирхгофа

Объединение формулы Пуассона и формулы запаздывающих потенциалов дает формулу, которую часто называют **формулой Кирхгофа** — формулу решения задачи Коши для волнового уравнения. Более точно Кирхгофом была получена следующая формула.

Теорема 24.3. *Пусть $\varphi(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi(x) \in C^2(zaR^3)$. Тогда классическое решение задачи Коши*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u(t,x), \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u\big|_{t=0} &= \varphi(x), \\ u_t\big|_{t=0} &= \psi(x). \end{aligned} \tag{24.5}$$

задается ***формулой Кирхгофа***

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \psi(\xi)\, dS + \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \varphi(\xi)\, dS + \frac{1}{4\pi a t} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \frac{\partial}{\partial n} \varphi(\xi)\, dS. \tag{24.6}$$

Доказательсто. Ранее доказано, что решение задачи Коши (24.5) определяется формулой Пуассона (24.4). Сделаем замену переменных в (24.4):

$$\xi = x + a\theta, \quad dS = dS_\xi = a^2 t^2 dS_\theta,$$

где dS_θ — элемент площади на единичной сфере с центром в 0, θ — вектор единичной нормали к сфере радиуса at с центром в x.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \varphi(\xi)\, dS_\xi \right) = a^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(t \cdot \int\limits_{\theta \in S_1(0)} \varphi(x + at\theta)\, dS_\theta \right) =$$

$$= a^2 \left(\int\limits_{\theta \in S_1(0)} \varphi(x+at\theta)\, dS_\theta + at \int\limits_{\theta \in S_1(0)} \left(\nabla \varphi(x+at\theta), \theta\right) dS_\theta \right) =$$

(вернемся к переменной $\xi = x + at\theta$)

$$= \frac{1}{t^2} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \varphi(\xi)\, dS_\xi + \frac{a}{t} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \underbrace{\left(\nabla \varphi(\xi), \theta\right)}_{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} dS_\xi = \frac{1}{t^2} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \varphi(\xi)\, dS_\xi + \frac{a}{t} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \frac{\partial}{\partial n} \varphi(\xi)\, dS_\xi.$$

В результате получаем:

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \psi(\xi)\, dS + \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \varphi(\xi)\, dS + \frac{1}{4\pi a t} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \frac{\partial}{\partial n} \varphi(\xi)\, dS,$$

что и требовалось доказать. ■

24.4.4. Метод спуска. Формула Пуассона для двумерного волнового уравнения

Рассматриваем по-прежнему многомерное волновое уравнение. Решим задачу Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u\left|_{t=0}\right. &= \varphi(x), \\ u_t\left|_{t=0}\right. &= \psi(x). \end{aligned}$$

в случае двух пространственных переменных при $n = 2$, $x \in \mathbb{R}^2$. Оказывается, что формула решения задачи Коши в случае $n = 2$ выводится из формулы решения задачи Коши размерности $n = 3$.

Метод, позволяющий свести задачу большей размерности к задаче меньшей размерности, называется **методом спуска**.

Пусть $u(t, x) = u(t, x, y, z)$ решение задачи Коши в случае $n = 3$ и пусть начальные функции φ и ψ не зависят от z, т. е. $\psi = \psi(x, y)$, $\varphi = \varphi(x, y)$. Решение этой задачи задается формулой Пуассона:

$$u(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{(\xi,\eta,\zeta) \in S_{at}(x,y,z)} \psi(\xi, \eta)\, dS + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{(\xi,\eta,\zeta) \in S_{at}(x,y,z)} \varphi(\xi, \eta)\, dS,$$

dS — элемент площади на сфере радиуса at с центром в точке (x, y, z), (ξ, η, ζ) — вектор.

Начальные функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ заданы в $\mathbb{R}^3$, но они не зависят от z, поэтому интегрирование по сфере в $\mathbb{R}^3$ можно свести к интегрированию по кругу в $\mathbb{R}^2$. Сфера радиуса R с центром в точке (x, y, z) проецируется в круг того же радиуса R с центром в точке (x, y). Проекция двукратная: одной и той точке на круге отвечает две точки: одна на верхней, а другая на нижней полусфере. Поскольку φ, ψ не зависят от z, интегралы по верхней и по нижней полусферам совпадают, и мы можем рассматривать только верхнюю полусферу, удвоив интеграл:

$$u(t, x, y, z) = \frac{1}{2\pi a^2 t} \int\limits_{(\xi,\eta,\zeta) \in S^+_{at}(x,y,z)} \psi(\xi, \eta)\, dS + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi a^2 t} \int\limits_{(\xi,\eta,\zeta) \in S^+_{at}(x,y,z)} \varphi(\xi, \eta)\, dS.$$

Координаты любой точки сферы (ξ, η, ζ) связаны с координатами центра сферы соотношениями

$$\begin{aligned} \xi &= x + R \sin\alpha \cos\beta, \\ \eta &= y + R \sin\alpha \cos\beta, \\ \zeta &= z + R \cos\alpha, \end{aligned}$$

где R — радиус сферы, α — угол между нормалью к сфере и осью z, β — угол между проекцией нормали на плоскость круга с центром (x, y) и осью x. Элемент площади круга равен $d\xi d\eta = J d\alpha d\beta$, где J — якобиан замены переменных $(\xi, \eta) \to (\alpha, \beta)$:

$$J = \begin{vmatrix} R \cos\alpha \cos\beta & -R \sin\alpha \sin\beta \\ R \cos\alpha \sin\beta & R \sin\alpha \cos\beta \end{vmatrix} = R^2 \cos\alpha \sin\alpha.$$

$$d\xi d\eta = R^2 \cos\alpha \sin\alpha d\alpha d\beta = \cos\alpha dS \quad \Rightarrow \quad dS = \frac{d\xi d\eta}{\cos\alpha},$$

т. к. $dS = R^2 \sin\alpha d\alpha d\beta$,

$$\cos\alpha = \frac{\zeta - z}{R},$$
$$\zeta - z = \sqrt{R^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2},$$

окончательно получаем

$$dS = \frac{R d\xi d\eta}{\sqrt{R^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}.$$

Учитывая, что $R = at$ и что в каждую точку круга проецируется две точки сферы (с верхней и с нижней полусфере) получим

$$u(t,x,y,z) = \frac{1}{2\pi a^2 t} \int\limits_{(\xi,\eta,\zeta)\in S^+_{at}(x,y,z)} \psi(\xi,\eta)\, dS + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2\pi a^2 t} \int\limits_{(\xi,\eta,\zeta)\in S^+_{at}(x,y,z)} \varphi(\xi,\eta)\, dS =$$
$$= \frac{at}{2\pi a^2 t} \int\limits_{(\xi,\eta)\in B_{at}(x,y)} \frac{\psi(\xi,\eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{at}{2\pi a^2 t} \int\limits_{(\xi,\eta)\in B_{at}(x,y)} \frac{\varphi(\xi,\eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}.$$

Если (x, y) — двумерный вектор, его можно заменить одной буквой $(x, y) = x$, тогда формула записывается короче:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{\xi\in B_{at}(x)} \frac{\psi(\xi)}{\sqrt{a^2t^2 - |\xi - x|^2}} dS + \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{2\pi a} \int\limits_{\xi\in B_{at}(x)} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2t^2 - |\xi - x|^2}} dS. \qquad (24.7)$$

Эта формула носит название **формулы Пуассона**.

Отметим, что гладкость решения не вполне соответствует гладкости начальных функций: из $u(t,x) \in C^2$ следует, что $\varphi \in C^2$, $\psi \in C^1$, однако такая формула дает $u \in C^2$ только при повышенных требованиях гладкости к начальным данным: $\varphi \in C^3$, $\psi \in C^2$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 24.4. *Пусть функции $\varphi(x,y) \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi(x,y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Тогда решение задачи Коши*

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),$$
$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x).$$

задается формулой Пуассона (24.7).

24.4.5. Задача Коши на наклонной прямой для волнового уравнения

Рассмотрим уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ и пусть для этого уравнения начальные данные заданы не на прямой $t = 0$, а на прямой$t = kx$.

$$u\big|_{t=kx} = \varphi(x),$$
$$u_t\big|_{t=kx} = \psi(x).$$

Подставляя в эти условия общее решение уравнения

$$u(t,x) = f(x-at) + g(x+at),$$

мы получаем систему

$$\begin{gathered} f(x(1-ak)) + g(x(1+ak)) = \varphi(x), \\ -af'(x(1-ak)) + ag'(x(1+ak)) = \psi(x). \end{gathered}$$

Интегрируя второе уравнение, получаем

$$\frac{a}{ak-1} f(x(1-ak)) + \frac{a}{ak+1} g(x(1+ak)) = \int\limits_0^x \psi(s)\,ds$$

и, комбинируя с первым, находим

$$\left(\frac{a}{ak-1} - \frac{a}{ak+1}\right) f(x(1-ak)) = \int\limits_0^x \psi(s)\,ds - \frac{a}{ak+1}\varphi(x),$$
$$\left(\frac{a}{ak+1} - \frac{a}{ak-1}\right) g(x(1+ak)) = \int\limits_0^x \psi(x)\,ds - \frac{a}{ak-1}\varphi(x).$$

Итак,

$$f(x) = \frac{a^2k^2-1}{2a} \int\limits_0^{\frac{x}{1-ak}} \psi(x)\,ds - \frac{ak-1}{2}\varphi\left(\frac{x}{1-ak}\right),$$
$$g(x) = -\frac{a^2k^2-1}{2a} \int\limits_0^{\frac{x}{1-ak}} \psi(s)\,ds + \frac{ak+1}{2}\varphi\left(\frac{x}{1-ak}\right).$$

Эти формулы в принципе ничем не хуже формул, полученных в случае обычных начальных условий, если только не считать случай $k = \pm\frac{1}{a}$: в этом случае совершенно неясно, как понимать полученные формулы. Оказывается, что заниматься бесплодным воображением в попытках ответить на вопрос "что значит формулы при $k = \frac{1}{a}$?"нет никакого смысла, а надо просто вернуться к исходной системе, которая при $k = \frac{1}{a}$ принимает вид:

$$\begin{gathered} f(0) + g(2x) = \varphi(x), \\ -af'(0) + ag'(2x) = \psi(x). \end{gathered}$$

Здесь уже ясно видно, что на функцию f никаких ограничений практически не накладывается, зато относительно функции мы получаем аж два уравнения, которые совсем не обязательно являются совместными. Чтобы система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$-af'(0) + \frac{a}{2}\varphi'(x) = \psi(x),$$

или, что эквивалентно, чтобы

$$a\varphi''(x) = 2\psi'(x).$$

При выполнении этого условия второе условие определяет лишь значение $f'(0)$, а первое — функцию $g(x)$. Остается произвол в выборе $f(x)$. Если же указанное условие не выполняется, то задача вообще решений не имеет.

Возникает естественный вопрос, что же это за такие исключительные значения $k = \pm\frac{1}{a}$? Вспомнив, что нас интересовали прямые $t = kx$,, легко увидеть, что при $k = \pm\frac{1}{a}$ мы получаем характеристики $x = \pm at$. Таким образом, для характеристик задача Коши оказывается некорректной: она либо не имеет решения совсем, либо решений оказывается бесконечно много.

24.4.6. Задача Гурса

С характеристиками обычно связывают не начальную задачу (которая, как уже было показано, некорректна), а другую задачу, которую называют **задачей Гурса**.

Теорема 24.5. *Решение задачи Гурса:*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \\ u\big|_{x=at} &= \varphi(x), \\ u\big|_{x=-at} &= \psi(x). \end{aligned}$$

описывается формулой:

$$u(t,x) = \varphi\left(\frac{x+at}{2}\right) + \psi\left(\frac{x+at}{2}\right) - \varphi(0)$$

и оно является классическим, если φ и ψ — дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Доказательсто. В точке $(0,0)$ пересечения характеристик обычно предполагается, что имеется условие согласования:

$$\varphi(0) = \psi(0).$$

Подставляя в условия, как и ранее, формулу общего решения уравнения

$$u(t,x) = f(x-at) + g(x+at),$$

получаем систему

$$\begin{aligned} f(0) + g(2x) &= \varphi(x), \\ f(2x) + g(0) &= \psi(x), \end{aligned}$$

из которой легко определяются g и f, что и дает искомую формулу решения задачи. ∎

- уравнению

$$\ddot{p} = -\lambda p$$

  для первого множителя,
- уравнению (приводящемуся к уравнению Бесселя относительно rv)

$$r^2 v'' + 2rv' + \left(\lambda r^2 - \mu\right) v = 0$$

  для второго,
- и к уравнению Лапласа—Бельтрами

$$\frac{1}{\sin\varphi}\left(\sin\varphi h_\varphi\right)_\varphi + \frac{h_{\psi\psi}}{\sin^2\psi} = -\mu h$$

  для третьего.

Таким образом, представление решения волнового уравнения в шаре содержит все: и синусы, и функции Бесселя, и сферические гармоники.